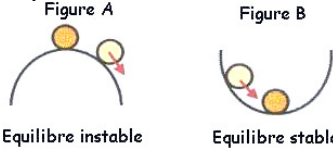


# Oscillateurs Mécaniques : Pendule Elastique



**Oscillateur mécanique** : Tout mobile qui effectue un mouvement de va et viens autours de sa position d'équilibre stable



Nous déplaçons légèrement la bille de sa position d'équilibre,

- **La figure A** : elle se met à rouler et ne reviendra pas à sa position de départ. L'équilibre est instable.
- **La figure B** : elle revient dans sa position de départ. L'équilibre est dit stable.

## I. Pendule Elastique

Un pendule élastique, ou **système solide-ressort**, est constitué d'un solide, de masse  $m$ , fixé à un ressort, de longueur initiale  $\ell_0$  et de raideur  $K$ , dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe.

### 1. La Tension de ressort

$$T = K \cdot \Delta \ell$$

Tension du ressort (N)

$$\Delta \ell = \ell - \ell_0$$

Allongement du ressort (m)

$$\ell_0$$

Longueur initiale  $\ell_0$  (m)

$$K$$

Raideur du ressort (N/m)

### Expression de $\Delta \ell$

**Ressort horizontal**

Ressort horizontal initialement non allongé et fixé directement au mobile ou au moyen d'un fil inextensible et de masse négligeable

$$\Delta \ell = x$$

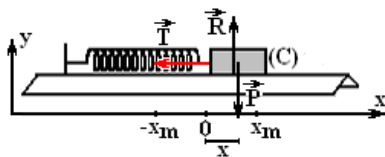
**Ressort vertical ou incliné**

On admet que le mouvement du solide est dans le sens positif et on conclut

<p><math>\Delta \ell = \ell - \ell_0</math></p> <p>Si le ressort s'allonge alors</p> <p><math>\Delta \ell = \Delta \ell_0 + x</math></p>	<p><math>\Delta \ell = \ell - \ell_0</math></p> <p>Si le ressort se comprime alors</p> <p><math>\Delta \ell = \Delta \ell_0 - x</math></p>	<p><math>\Delta \ell = \ell_0 - \ell</math></p> <p>Si le ressort s'allonge alors</p> <p><math>\Delta \ell = \Delta \ell_0 - x</math></p>	<p><math>\Delta \ell = \ell_0 - \ell</math></p> <p>Si le ressort se comprime alors</p> <p><math>\Delta \ell = \Delta \ell_0 + x</math></p>
--	--	--	--

### 2. Equation différentielle :

Un solide, de masse  $m$  sur un banc à coussin d'air horizontal, fixé à un ressort à spires non jointives, de longueur initiale  $\ell_0$  et de raideur  $K$ ,



Système : Solide (C)

Bilan des forces :

- $\vec{T}$  : Tension du ressort
- $\vec{R}$  : Réaction du plan horizontal
- $\vec{P}$  : Poids du corps (C)

En appliquant la 2<sup>ème</sup> loi de Newton :  $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}_G$

$$\vec{T} + \vec{R} + \vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$$

$$\vec{T} \begin{pmatrix} T_x = -T \\ T_y = 0 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{P} \begin{pmatrix} P_x = 0 \\ P_y = -P = -m \cdot g \end{pmatrix} \text{ et } \vec{R} \begin{pmatrix} R_x = 0 \\ R_y = R \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}_G \begin{pmatrix} a_x = \ddot{x} \\ a_y = 0 \end{pmatrix}$$

Sur l'axe Ox :  $T_x + R_x + P_x = m \cdot a_x$

$$-T = m \cdot \ddot{x} \text{ et } -K \cdot \Delta \ell = m \cdot \ddot{x} \text{ et } -K \cdot x = m \cdot \ddot{x} \text{ d'où } -\frac{K}{m} \cdot x = \ddot{x}$$

donc  $\ddot{x} + \frac{K}{m} \cdot x = 0$  : Equation différentielle de mouvement du centre d'inertie G

L'équation différentielle est de la forme  $\ddot{x} + \omega_0^2 \cdot x = 0$  avec  $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$  ou bien  $\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}$  (en rad/s)

### 3. Equation horaire ou la solution de l'equation différentielle :

$$x = x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$$

ou bien

$$x = x(t) = X_m \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

avec

$x(t)$  : l'abscise (élongation) du point G et varie entre  $X_m$  et  $-X_m$   
 $X_m$  : Amplitude ou élongation maximale  
 $\omega_0$  : pulsation (rad/s)  
 $T_0$  : la période (s)  
 $\omega_0 \cdot t + \varphi$  : Phase à l'instant  $t$   
 $\varphi$  : Phase à l'origine des temps  $t=0$

**Déterminer les constantes  $X_m$ ,  $T_0$  et  $\varphi$  :**

\*\*

**Comment déterminer  $X_m$**

<b>1. Phrase</b>	
	<p>- On écarte le corps de 2cm de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale  <math>X_m=2\text{cm}</math></p> <p>- Le corps oscille entre deux points A et B distante de <math>AB=4\text{cm}</math>  <math>X_m = 2\text{cm}</math> d'où <math>AB = 2.X_m = 4\text{cm}</math></p>

<b>2. Graphiquement</b>	<b>2.1. Par rapport à l'axe temps</b>		$X_m=1.5\text{cm}$
-------------------------	---------------------------------------	--	--------------------

\*\*

**Comment déterminer la période propre  $T_0$**

<b>3. Enregistrement</b>		<p><math>\tau</math> : la durée entre l'enregistrement de deux points successifs</p> <p style="text-align: center;"><math>T=16.\tau</math></p>
--------------------------	--	--

<b>4. Graphiquement <math>x=f(t)</math></b>		<p style="text-align: center;">Attention à la lecture et à l'échelle</p> <p style="text-align: center;"><math>T_0=3.2\text{ms}</math></p>
---	--	---

\*\*

**Comment déterminer la phase à l'origine  $\varphi$**

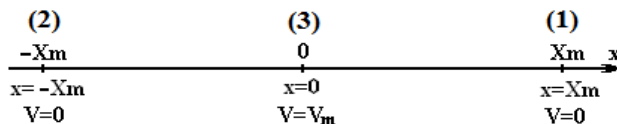
$x = x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$  : l'équation horaire  $V_x = \dot{x}(t) = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$

l'expression de la composante du vecteur vitesse  $V_x$  et  $\sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$  sont opposées (ont des signes différents)

$x_0 = x(0) = X_m \cdot \cos(\varphi)$  d'où  $\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{X_m}$  à l'instant  $t=0$   $V_{0x} = V(0) = \dot{x}(0) = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin(\varphi)$

$V_x$  à l'instant  $t=0$  et  $\sin(\varphi)$  sont opposées (ont des signes différents) On en conclut que  $V_x$  à l'instant  $t=0$  et  $\varphi$  sont opposées aussi

En comparant le sens de mouvement avec le sens positif de l'axe, on détermine le signe de  $V_x$  la composante de la vitesse et on en déduit le signe de la phase  $\varphi$



**1<sup>er</sup> cas :**

(1) On écarte le corps, dans le sens positif, de  $X_m$  de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps

	$x(0) = X_m$ $\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{X_m} = 1$ d'où $\varphi = 0$	
--	--	--

**2<sup>em</sup> cas :**

(2) On écarte le corps, dans le sens négatif, de  $X_m$  de sa position d'équilibre et on le libère sans vitesse initiale à un instant considéré comme origine des temps

	$x(0) = -X_m$ $\cos(\varphi) = \frac{x(0)}{X_m} = 1$ <p>d'où <math>\varphi = \pi</math></p>	
--	---	--

**4. Expression de la période propre  $T_0$  :**

$x = x(t) = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$  : l'équation horaire

On dérive deux fois par rapport au temps t :

$$\dot{x} = -x_m \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) \quad \ddot{x} = -x_m \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right) = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x \quad \ddot{x} + \frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot x = 0$$

On compare cette expression avec l'équation différentielle, on déduit que pour que soit une solution de l'équation différentielle,

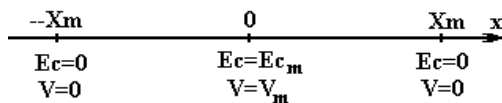
$x(t) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi_0\right)$  il suffit que  $\frac{4\pi^2}{T_0^2} = \frac{K}{m}$   $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$

**I. Etude Energétique**

Energie du système est la somme des énergies de ses composantes

**1. Energie cinétique :**

$x = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$  et  $V_x = -X_m \cdot \frac{2\pi}{T_0} \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$  et  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{K}{m}}$   $E_c = \frac{1}{2} m \cdot V^2$



- Si  $x=X_m$  ou  $x=-X_m$  alors l'énergie cinétique est nulle donc la vitesse est nulle et l'oscillateur s'arrête et change le sens de son mouvement
- Si  $x=0$  alors l'oscillateur passe par sa position d'équilibre et son énergie cinétique est maximale et sa vitesse l'est aussi

**2. Energie potentielle :**

L'énergie potentielle (de position), définie à une constante arbitraire près, ne dépend que de la position du corps dans l'espace.

❖ **Energie potentielle élastique  $E_{pe}$**

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C$$

La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle  $E_{pe}=0$

Si le pendule élastique est horizontal alors  $\Delta \ell = x$  alors

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + C$$

On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique  $x=0$  et  $E_{pe}=0$  d'où  $C=0$  alors

$$E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

❖ **Energie potentielle de pesanteur  $E_{pp}$**

$$E_{pp} = m \cdot g \cdot Z + C$$

La constante C est déterminé à partir d'un cas référentiel de l'énergie potentielle  $E_{pp}=0$

On considère le plan vertical passant par la position d'équilibre comme repère de l'énergie potentielle élastique  $z=0$  et  $E_{pp}=0$  d'où  $C=0$  alors

$$E_{pp} = m \cdot g \cdot Z$$

**NB :**  
Pour un pendule élastique horizontal  $E_{pp}=0$

Conclusion :  $E_p = \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$

On a  $x = X_m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$  alors  $E_p = \frac{1}{2} K \cdot X_m^2 \cdot \cos^2\left(\frac{2\pi}{T_0} \cdot t + \varphi\right)$

**3. Expression de la variation de l'énergie potentielle :**

$\Delta E_{pe}$  : Variation de l'énergie potentielle élastique

$$\Delta E_{pe} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_2^2 - \Delta \ell_1^2) = -W_{1 \rightarrow 2}(\vec{T})$$

$\Delta E_{pp}$  : Variation de l'Energie potentielle de pesanteur

$$\Delta E_{pp} = m \cdot g \cdot (Z_2 - Z_1) = -W_{1 \rightarrow 2}(\vec{P})$$

#### 4. Energie mécanique :

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle,  $E_m = E_c + E_p$

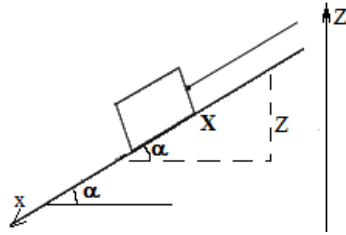
$$E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2 + C \quad \text{Pour les conditions décrites avant on peut écrire} \quad E_m = \frac{1}{2} \cdot m \cdot V^2 + \frac{1}{2} \cdot K \cdot x^2$$

#### 5. Le cas du pendule élastique incliné ou vertical

X : la distance que parcourt le corps sur le plan incliné et elle constitue l'hypoténuse du triangle

Les deux axes sont opposés et

$$Z = -X \cdot \sin(\alpha)$$



**NB :** si on change l'orientation de l'axe z

- L'expression de l'énergie potentielle varie

$$E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = -m \cdot g \cdot Z + C$$

- La relation entre abscisse varie aussi

$$Z = X \cdot \sin(\alpha)$$

- $E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = m \cdot g \cdot Z + C$
- Déterminer l'expression de la constante C
  - Déterminer le plan horizontal référentielle de l'énergie potentielle  $E_{p_p} = 0$
  - Déterminer l'abscisse correspondant  $Z_0$

$$Z = Z_0 \text{ et } E_{p_p}(Z_0) = 0$$

D'où

$$E_{p_p}(Z_0) = m \cdot g \cdot Z_0 + C = 0$$

donc

$$C = -m \cdot g \cdot Z_0$$

- On remplace C par son équivalent et on obtient alors

$$E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = m \cdot g \cdot Z - m \cdot g \cdot Z_0$$

$$E_{p_p} = E_{p_p}(Z) = m \cdot g \cdot (Z - Z_0)$$

#### Energie potentielle élastique

$$1. \quad E_{p_e} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C$$

Déterminer l'expression de  $\Delta \ell$  en fonction de x soit  $\Delta \ell = \Delta \ell_0 + x$

- Déterminer la constante C

- Déterminer le plan référentiel de l'Energie potentielle  $E_{p_e} = 0$

- Déterminer l'abscisse correspondant  $x_0$

$$x = x_0 \text{ et } E_{p_e}(x_0) = 0$$

$$\text{D'où } E_{p_e}(x_0) = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2 + C = 0$$

$$\text{Donc } C = -\frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2$$

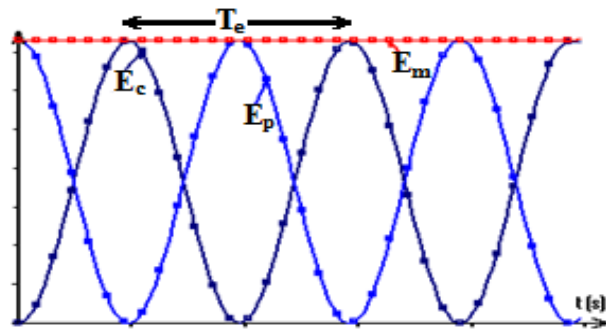
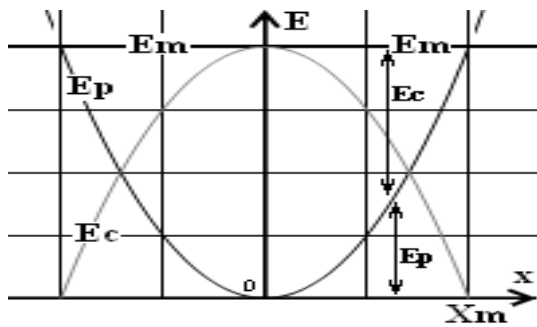
- Remplacer dans l'expression de  $E_{p_e}$

$$E_{p_e} = \frac{1}{2} \cdot K \cdot \Delta \ell^2 + C = \frac{1}{2} \cdot K \cdot (\Delta \ell_0 + x_0)^2 + C$$

#### 6. Les graphes d'énergies :

- Au point  $x = X_m$  on a  $E_m = E_{p_{\max}}$

- Au passage par la position d'équilibre  $x = 0$  on a  $E_m = E_{c_{\max}}$



$T_0 = 2 \cdot T_e$  : La période des oscillations  $T_0$  est le double de la période des énergies  $T_e$

**NB :**

S'il existe frottement alors l'amplitude des oscillations diminue par dissipation (perte) de l'énergie mécanique au cours du temps

